Úlohy soutěže MASO, 24. listopadu 2006

1. Honza si kreslil do písku různé útvary. Jednou si takhle nakreslil dvě různé kružnice a dvě různé přímky. S údivem zjistil, že kdyby je nakreslil jakkoliv jinak, neprotly by se ve více bodech než teď. Honza průsečíky pečlivě spočítal. Kolik průsečíků Honza napočítal?

   [11]

2. „Abych se dožil 84 roků, musím žít ještě tři své nynější životy," uvažoval nadějný matematik Palo. Kolik má teď roků?

   [21]

3. Aneta rozděluje přirozená čísla na šťastná a nešťastná, žádná jiná čísla nezná. Každé číslo je buď šťastné nebo nešťastné. Číslo je šťastné, pokud je dělitelné číslem 7. Kolik je nešťastných dvojciferných čísel?

   [77]

4. Ze 150 matematiků Matematické komory dokázalo Velkou Fermatovou větu 130 matematiků, Moore-Osgoodovu větu 110 matematiků a Bolzano-Cauchyho větu 80 matematiků. Kolik nejméně matematiků určitě dokázalo všechny tři uvedené věty?

   [20]

5. Osm kamarádů si slíbilo, že si z prázdninových cest všichni navzájem pošlou pohlednice. Kolik pohlednic rozeslali?

   [56]

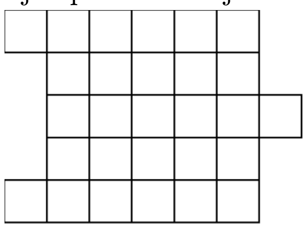
6. S použitím právě pěti trojek a matematických operací sčítání, násobení, odčítání a dělení vyjádřete číslo 13.

   [více řešení]

7. Johny si hrál se žvýkačkou a vymodeloval kvádr o rozměrech $6\,\mathrm{cm} \times 3\,\mathrm{cm} \times 19\,\mathrm{cm}$. Potom ji znova rozžvýkal a vymodeloval z ní tři různě velké krychle. Překvapeně pak zjistil, že velikosti všech hran krychlí v centimetrech byly celá čísla. Jaké rozměry měly Johnyho krychle?

   [6 cm, 5 cm, 1 cm]

8. Náměstí v izraelském městě Jeruzalém je složeno z dlažebních kostek, popisuje ho obrázek. Rozdělte náměstí na sedm shodných částí. Dělit je povoleno jen podél stran jednotlivých dlažebních kostek.



   [&]

9. Piotr Vasiljevič Kamčatskij měl v krabici pavouky a brouky. Dohromady tam bylo 8 kusů potvor a dohromady měli 54 nohou (pavouk má 8 nohou a brouk má 6 nohou). Kolik brouků a kolik pavouků měl Piotr v krabici? (Všechna zvířátka mají všechny nohy.)

   [3 pavouci, 5 brouků]

10. Dvojčata Anička a Adélka jsou k nerozeznání. Liší se jen tím, že Anička lže pouze v pondělí, středu, čtvrtek a sobotu a Adélka jen v úterý, čtvrtek, pátek a neděli. Jednou mi jedna pověděla, že zítra bude lhát, a druhá, že zítra bude mluvit pravdu. Jaký mohl být tenkrát den? Vypište všechny možnosti.

    [středa nebo čtvrtek]

11. Malý Dušan každý den použije stejné množství mýdla. Když dostal nové mýdlo, mělo tvar kvádru. Po sedmi dnech se každý rozměr mýdla zmenšil na polovinu. Kolik dní ještě Dušanovi mýdlo vydrží?

    [1 den]

12. Ľubku zajímá následující problém: Která z čísel 1734, 1743, 3417, 3 471 a 7 134 se dají beze zbytku vydělit 17? Pomozte jí.

[1 734, 3 417]

13. Slimák se rozhodl vylézt na strom vysoký 12 metrů. Začal v pondělí. Od rána do večera vylezl 6 metrů, ale v noci se posunul o 4 metry zpátky. Toto se mu stávalo každý den, dokud nebyl na vrcholu stromu. Který den vylezl na vrchol stromu?

[čtvrtek]

14. Jozef Spŕcha jedl čipsy. Nedříve v první rundě jezení snědl jeden čips, pak v druhé rundě dva čipsy, ve třetí tři čipsy, ve čtvrté čtyři a tak dále. Když ho už z toho po některé rundě bolelo břicho, zjistil, že celkový počet čipsů, které snědl, je trojciferné číslo, které má všechny tři cifry stejné. Kolik rund Jozef Spŕcha absolvoval?

[36]

15. Láďo nakreslil šestiúhelník, který má pět vnitřních pravých úhlů. Zkuste to i vy!

[&]

16. Ve skladu je 11 velkých beden. Do některých z nich je vloženo po 8 menších prázdných bednách. Kolik je všech beden, jestliže je 46 beden prázdných?

[51]

17. Káťa měla za úkol v čísle 573 168 492 škrtnout dvě číslice tak, aby dostala co největší číslo dělitelné šesti. Které číslice měla škrtnout?

[5, 1]

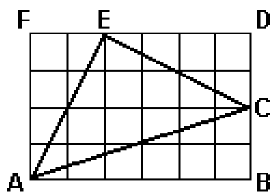
18. Veronika recykluje staré svíčky a vyrobí jednu novou ze sedmi zbytků. Nově vzniklé svíčky bude po shoření opět možno recyklovat. Každá svíčka hoří hodinu. Kolik hodin si mohla Veronika svítit, pokud svítila vždy právě jednou svíčkou a na začátku měla 679 zbytků? (Kdyby na nějakou svíčku neměla dost zbytků, tak ji nevyrobí, ale zbytky si odloží.)

[113]

19. Velký Bob měl trojúhelník ABC, který byl rovnoramenný se základnou AB a s bodem M jako středem úsečky AB. Malý Bob mu tam dokreslil kružnici k se středem v bodě M a s průměrem AB. Prostřední Bob označil průsečíky trojúhelníku ABC a kružnice k jako body D a E. Chytrý Bob změřil, že velikost úhlu AME je 140°. No a Hloupý Bob, který z toho byl úplně mimo, se zeptal: „Jaká je proboba velikost úhlu ABC?“

[70°]

20. Ve čtvercové síti je trojúhelník ACE. Určete součet velikostí úhlů BAC a CED.



[45°]

21. Jaké číslo je přesně uprostřed mezi polovinou třetiny a čtvrtinou pětiny?

[$\frac{13}{120}$]

22. Určete všechny dvojice čísel, jejichž největší společný dělitel je 6 a nejmenší společný násobek je 72.

[$6, 72$; $18, 24$]

23. Najděte takové trojciferné číslo, pro které platí, že když od něho odečtu 9, bude rozdíl dělitelný devíti, když odečtu 8, bude rozdíl dělitelný osmi, a když odečtu 7, bude rozdíl dělitelný sedmi.

[504]

24. Šachový kůň Oto stojí v levém dolním rohu šachovnice dlouhé 4 cm a široké 3 cm (jedno políčko je dlouhé a široké 1 cm). Pokud chce skákat tak, aby na každém políčku stál právě jednou, a přitom neopustil šachovnici, jak musí skákat?

[&]

25. Kovář dostal 5 částí řetězu, každá část má 3 články. Musel je spojit do jednoho souvislého řetězu. Kolik nejméně článků musel rozseknout a znova spojit?

[3]

26. Když přirozené číslo onemocní na digitální chřipku, onemocní okamžitě taky všechny jeho násobky a dělitelé větší než 1. Nejméně kolik čísel z intervalu 2 až 35 (včetně) musí onemocnět na digitální chřipku, aby následně onemocněla všechna přirozená čísla od 2 do 35? Napiš, která čísla musí onemocnět.

[9 čísel: 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 30, 31]

27. V kolika pravidelných mnohoúhelnících je velikost vnitřního úhlu ve stupních daná celým číslem?

[22]

28. Z čísel -9, -7, -3, 0, 2, 5, 8 vyber taková dvě čísla, aby součet jejich součinu a součtu byl co nejmenší.

[-9, 8]

29. Osel a mula nesli pytle. Osel naříkal pod těžkým břemenem. Na to mula povídá: „Proč sténáš? Kdybys mi dal jeden pytel, nesla bych dvakrát tolik jako ty.“ Osel jí na to odpověděl: „Kdybych ti jeden pytel sebral, nesli bychom oba stejně.“ Kolik pytlů nese osel a kolik mula?

[osel 5 pytlů, mula 7 pytlů]

30. Na hodině matematiky děti hrály hru, při které počítaly od 1 do 100 a místo každého násobku čísla 3 a každého čísla končícího na 3 tleskly. Kolikrát děti tleskly?

[39]

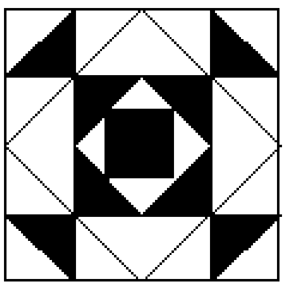
31. Ve stavebnici je 150 stejných krychliček. Kolik nejméně stavebnic musíme spojit, aby se ze všech krychliček dala postavit jedna velká krychle? (Ze všech stavebnic se musí použít všechny krychličky.)

[180]

32. Elvis hledal přirozené číslo s touto vlastností: Když ho zmenšíme o 7 a výsledek vydělíme deseti, dostaneme číslo, které je o 34 menší než hledané číslo. Jaké číslo hledal?

[37]

33. Strana největšího čtverce znázorněného na obrázku má délku $4 \cdot \sqrt{2}$ cm a všechny úhly na obrázku jsou pravé anebo mají velikost 45 stupňů. Jaký obsah má tmavá část mozaiky?



[10 cm^2]

34. Kolikrát nejméně musím lámat tabulku čokolády 6×4, abych dostal jednotlivé čtverečky? (Dva kousky čokolády nemůžu položit na sebe.)

[23]

35. Součet několika přirozených čísel je 11. Jaký největší může být jejich součin?

[54]

36. Součin tří po sobě jdoucích celých čísel je 1 716. Která čísla to jsou?

[11, 12, 13]

37. Helga napsala za sebou přirozená čísla tak, že jí vznikla posloupnost 12345678910111213... Jaká číslice bude v této posloupnosti na tisícím místě?

[2]

38. Z jednoho řeckého chrámu zůstaly už jen sloupy, které jsou vlastně vrcholy čtvercové sítě se stranou čtverce 1 m. Na jednom z nich sedí opice. Kdyby skočila 1 m doleva, ocitla by se na sloupu, kde je ořech. Opice však umí pouze 5 m dlouhé skoky. Může se i přesto dostat k ořechu? Pokud ano, jak se dostane k ořechu?

[ano, &]

39. Najděte všechna přirozená čísla, jejichž ciferný součet i ciferný součin je 6.

[6, 123, 132, 213, 231, 312, 321]

40. Najděte všechny dvojice přirozených čísel y, z větších než jedna, pro které podíl $\frac{(52 - y \cdot z)}{5}$ je opět přirozené číslo.

[$2, 6$; $3, 4$; $2, 11$; $3, 9$; $2, 16$; $4, 8$; $6, 7$; $2, 21$; $3, 14$]

41. Šachový kůň Otto, bratr šachového koně Ota, stojí na šachovnici dlouhé 3 cm a široké 3 cm. Jedno políčko je dlouhé i široké 1 cm. Jak má skákat, pokud chce stát na každém políčku právě jednou a přitom nesmí vyskočit ze šachovnice? Začít může na libovolném místě.

[nelze]

42. Jaký úhel svírají ručičky hodin, když ukazují za 10 minut 10?

[$5°$]

43. Čtyři královi služebníci dostali dohromady 96 zlatých. První dostal nejméně. Druhý dostal o tolik víc než první, o kolik třetí dostal víc než druhý a čtvrtý víc než třetí. Třetí a čtvrtý dostali dohromady dvakrát tolik, co první a druhý. Kolik zlatých dostal čtvrtý služebník?

[36]